self-injective cellular algebras of polynomial growth representative type (Representation Theory and Related Areas)

AUTHOR(S):

宮本, 賢伍

数理解析研究所講究録
第2077巻 2018年 40-51

self-injective cellular algebras of polynomial growth representation type

大阪大学情報科学研究科 情報基礎数学専攻　宮本 賢伍
Kengo Miyamoto
Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University

Abstract

本稿では，基礎体の標数が 2 でない場合に多項式増大表現型の直既約な自己移入 Cellular 代数を森田同値によって分類した結果を報告する．本研究は大阪大学の有木進先生，信州大学の和田堅太郎先生および岡山理科大学の加瀬遼一先生との共同研究 [AKMW] である．

1 Introduction

Cellular 代数は 1996 年に Graham と Lehrer によって導入された概念であり [GL]，リー環の表現論のなかに自然に現れる顕著な性質を持つ有限次元代数を公理化した代数系である．例えば対称群の群代数やそれに付随した Iwahori–Hecke 代数 [DJ1] をはじめ，有限 Weyl 群のヘッケ環のブロック代数 [G1]，[G2]，Temper–Lieb 代数や Brauer 代数 [GL]，q-Schur 代数 [DJ2] などは Cellular 代数である．

また，Cellular 代数は半単純代数の一般化の側面も持つ．よく知られているように体 $\mathbf{k}$ 上の有限次元代数 A が半単純代数であるとき，Wedderburn–Artin の構造定理によって A はある斜体 D_i と自然数 n_i を用いて，

$$A \simeq M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k)$$

とできる．更に，それぞれの M_{n_i} に対して自然なベクトル表現を考えることで単純 A 加群の同型類の完全代表系を得ることができることも半単純代数の特徴である．そこで，有限次元代数 A を直和 (直積) 分解を両側イデアルのフィルトレーションに取り替えることを考えよう．Cellular 代数とは大雑把に言えば，「行列に似た両側イデアル」によるフィルトレーションを持つ代数であり，そのフィルトレーションの全体もしくは一部から単純 A 加群の同型類の完全代表系を構成できるようなものである．

他方，多元環の表現論の大きな問題意識のひとつとして，「標準形の分類問題」がある．例えば，有限生成アーベル群の基本定理は自然数の素因数分解の存在と一意性を与える問題の一般化であるし，代数閉体 $\mathbf{k}$ 上の一変数多項式環 $\mathbf{k}[x]$ の n 次元直既約加群は $\mathbf{k}[x]/(x-\lambda)^n$ に同型であって，その表現は Jordan 標準形である．その後，この Jordan 標準形の分類を

基にして，同じサイズをもつ行列の組を同時に標準化する問題が 19 世紀後半に提唱され，Kronecker によってその解を得た．これは Kronecker 標準形と呼ばれるもので，「無限表現型」の基本的なモデルである．このように表現の型を標準型にして分類する問題は表現論の基本的な問題のひとつである．表現型の大きな括りは Drozd によって与えられた [D]: A を代数閉体 $\mathbf{k}$ 上の有限次元代数とする．

(1) A が**有限表現型**であるとは，直既約左 A 加群が有限個しかないときをいう．
(2) A が **tame 表現型**であるとは，自然数 d を固定すると，左加群として自由な有限生成 $(\mathbf{k}[x], A)$ 両側加群 $M_1, \cdots, M_{n_d}$ であって，有限個を除く全ての d 次元直既約左 A 加群がある i によって $\mathbf{k}[x]/(x-\lambda) \otimes_{\mathbf{k}[x]} M_i$ の形に表せるときをいう．
(3) A が **wild 表現型**とは，A が tame 表現型でないときをいう．

定義より，有限表現型は tame 表現型である．また，tame 表現型は n_d の増大率によって更に細かく分類される．その中で多項式程度で n_d の増大が抑えられるものが「多項式増大表現型」である [Ri]，[S]: A を $\mathbf{k}$ 上の有限次元代数とする．このとき A が **domestic 表現型**であるとは A が tame 表現型であって，自然数 m が全ての自然数 d に対して $n_d \le m$ となるようにとれるときをいい，A が**多項式増大表現型**であるとは A が tame 表現型であって，自然数 m がすべての自然数 d に対して $n_d \le d^m$ となるようにとれるときをいう．

体 $\mathbf{k}$ 上の代数 A が**自己移入代数**であるとは，A の直既約射影加群の同型類の完全代表系が直既約移入加群の同型類の完全代表系と一致しているときをいう．これは，$\mathbf{k}$ 上の代数 A が移入加群であることと同値である．例えば，任意の Frobenius 代数や，半単純代数は自己移入代数である．更に，A が自己移入 Cellular 代数であれば A は**弱対称代数**，すなわち，任意の直既約射影加群 P に対して A 加群の同型 $\mathrm{top}(P) \simeq \mathrm{soc}(P)$ が成り立つ [KX4]．tame 表現型の弱対称代数の分類については既に成果があり（[BHS]，[BS]），これらは Skowroński によって [S] にまとめられている．

この報告集では，「基礎体 $\mathbf{k}$ の標数が 2 でないような多項式増大型表現型をもつ自己移入 Cellular 代数を森田同値で完全に分類した」ことを報告する．

以下，この報告集を通して，基礎体 $\mathbf{k}$ は代数閉体であって標数は 2 でないと仮定する．加群はすべて左加群を扱い，クイバーの矢の合成について，$\xrightarrow{\alpha}\xrightarrow{\beta}$ は $\alpha\beta$ と書くことにする．

2 Cellular 代数とその性質

まずは，Cellular 代数を定義しよう．

定義 2.1 ([GL]) 結合的な $\mathbf{k}$ 上の代数 A がセルデータ $(\Lambda, \mathcal{T}, \mathcal{C}, \iota)$ を持つ **Cellular 代数**であるとは，次の 3 条件を満たすときをいう．

(CA1) Λ はある順序 $\geq$ によって半順序有限集合をなす．この順序 $\geq$ により，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，有限集合 $\mathcal{T}(\lambda)$ が定まり，

$$\mathcal{C} := \{c^{\lambda}_{S,T} \mid S, T \in \mathcal{T}(\lambda),\ \lambda \in \Lambda\}$$

が A の $\mathbf{k}$ 上の線型空間としての基底をなす．これを A の**セル基底**という．

(CA2) $\iota\colon A \to A$ は位数 2 の反代数自己同型写像であって，$\iota(c^{\lambda}_{S,T}) = c^{\lambda}_{T,S}$ を満たす．

(CA3) 各 λ に対して，$A^{>\lambda} := \mathrm{Span}_{\mathbf{k}}\{c^{\mu}_{S',T'} \mid S', T' \in \mathcal{T}(\mu),\ \mu > \lambda\}$ とおく．このとき，任意の $a \in A$ に対して

$$ac^{\lambda}_{S,T} \equiv \sum_{U \in \mathcal{T}(\lambda)} r^{(a,S)}_{U} c^{\lambda}_{U,T} \mod A^{>\lambda} \tag{2.1}$$

が成り立つ．ここに $r^{(a,s)}_{U}$ は T に依存しないスカラーである．

注意 2.2 (1) Cellular 代数 A のセルデータは一意的ではない．

(2) (2.1) に反自己同型 ι を施すことで，$\iota(c^{\lambda}_{S,T}) = \iota(c^{\lambda}_{T,S})$ より次を得る:

$$c^{\lambda}_{S,T} a \equiv \sum_{U \in \mathcal{T}(\lambda)} r^{(\iota(a),T)}_{U} c^{\lambda}_{S,U} \mod A^{>\lambda}$$

ただし，$r^{(\iota(a),T)}_{U}$ は S に依存しないスカラーである．特に任意の λ に対して，等式

$$c^{\lambda}_{U,S} c^{\lambda}_{T,V} = r_{S,T} c^{\lambda}_{U,V} \tag{2.2}$$

となるような U, V に依存しないスカラー $r_{S,T}$ が存在する．

例 2.3 n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の群代数 $\mathbf{k}\mathfrak{S}_n$ のセル基底を具体的に記述しよう．Λ を n 個の箱からなる Young 図形全体とし，ここに順序を

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \leq \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_t) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \sum_{i=1}^{j} \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{j} \mu_i \quad \text{for all } j = 1, 2, \ldots, t$$

で定義する．各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，有限集合 $\mathcal{T}(\lambda)$ を型が λ の標準盤全体と定義する．箱 x が Young 図形 λ にあるとき，$x \in \lambda$ とかくことにする．すると，$\mathcal{T}(\lambda)$ の元は全単射

$$\{x \in \lambda\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$$

と理解できる．Young 図形 λ の行規準盤を t^{λ} とおく．反代数自己準同型 $\iota\colon \mathbf{k}\mathfrak{S}_n \to \mathbf{k}\mathfrak{S}_n$ を $\mathfrak{S}_n \ni w \mapsto w^{-1} \in \mathfrak{S}_n$ で定義する．$S \in \mathcal{T}(\lambda)$ を取り，写像 $d_S\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\} \in \mathfrak{S}_n$ を $d_S := S \circ (t^{\lambda})^{-1}$ と定め，S_{λ} を行固定化群とする．以上の準備のもと，

$$\mathcal{C} := \left\{ c^{\lambda}_{S,T} := d_S \left(\sum_{w \in S_{\lambda}} w \right) \iota(d_T) \right\}$$

とすれば $\mathbf{k}\mathfrak{S}_n$ はセルデータ $(\Lambda, \mathcal{T}, \mathcal{C}, \iota)$ を持つ Cellular 代数である．

$n = 3$ のときに具体的に書いてみる．まず，$\mathfrak{S}_3$ の生成元として $s_1 = (1,2)$ と $s_2 = (2,3)$ が取れることに注意する．箱が 3 個の Young 図形は

$$(3) := \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline \end{array} \quad \geq \quad (2,1) := \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \geq \quad (1,1,1) := \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

の 3 つである．従って，

$$\mathcal{T}((3)) = \{t^{(3)}\}, \quad \mathcal{T}((2,1)) := \left\{ t^{(2,1)},\ s_2 t^{(2,1)} := \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \right\}, \quad \mathcal{T}((1,1,1)) = \{t^{(1,1,1)}\}$$

となる．それぞれの場合にセル基底を求めていこう．

(i) (3) のケース．このとき，$S_{(3)}$ は $\mathfrak{S}_3$ 自身なので，$d_{(3)} = 1$ となり，

$$c^{(3)}_{t^{(3)}, t^{(3)}} := 1 + s_1 + s_2 + s_1 s_2 + s_2 s_1 + s_1 s_2 s_1$$

となる．

(ii) $(2,1)$ のケース．このとき，$S_{(2,1)} = \mathfrak{S}_2 = \{1, s_1\}$ であり，

$$d_{t^{(2,1)}} = 1, \quad d_{s_2 t^{(2,1)}} = s_2$$

だから

$$c^{(2,1)}_{t^{(2,1)}, t^{(2,1)}} := 1 + s_1, \quad c^{(2,1)}_{t^{(2,1)}, s_2 t^{(2,1)}} := s_2 + s_1 s_2,$$

$$c^{(2,1)}_{s_2 t^{(2,1)}, t^{(2,1)}} := s_2 + s_2 s_1, \quad c^{(2,1)}_{s_2 t^{(2,1)}, s_2 t^{(2,1)}} := 1 + s_1 s_2 s_1.$$

(iii) $(1,1,1)$ のケース．このとき，$S_{(1,1,1)}$ は自明群なので，$d_{(1,1,1)} = 1$ となり，$c^{(1,1,1)}_{t^{(1,1,1)}, t^{(1,1,1)}} := 1$ となる．

例 2.4　代数 A を以下のクイバーと関係式で生成される $\mathbf{k}$ 上の代数とする．

$$1 \underset{\gamma}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\delta}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} 3\,; \quad \alpha\beta = 0,\ \delta\gamma = 0,\ \gamma\alpha - \beta\delta = 0.$$

このとき，直既約射影 A 加群は次で与えられる:

$$P(1) := \mathbf{k}e_1 \oplus \mathbf{k}\gamma \oplus \mathbf{k}\gamma\alpha, \quad P(2) := \mathbf{k}e_2 \oplus \mathbf{k}\alpha \oplus \mathbf{k}\delta \oplus \mathbf{k}\delta\beta, \quad P(3) := \mathbf{k}e_3 \oplus \mathbf{k}\beta \oplus \mathbf{k}\beta\delta.$$

反代数自己同型 $\iota\colon A \to A$ は頂点は固定し，

$$\alpha \mapsto \gamma, \quad \gamma \mapsto \alpha, \quad \beta \mapsto \delta, \quad \delta \mapsto \beta$$

によって誘導される写像で定義する．このとき，$\Lambda := \{1 < 2 < 3 < 4\}$ で定め，各 $i \in \Lambda$ に対して

$$\mathcal{T}(i) := \begin{cases} \{1\} & i = 1, 4, \\ \{1, 2\} & i = 2, 3 \end{cases}$$

で定義する．このとき A のセル基底は

$$[c^1_{1,1}] := [e_3], \begin{bmatrix} c^2_{1,1} & c^2_{1,2} \\ c^2_{2,1} & c^2_{2,2} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} e_2 & \beta \\ \delta & \delta\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c^3_{1,1} & c^3_{1,2} \\ c^3_{2,1} & c^3_{2,2} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} e_1 & \alpha \\ \gamma & \beta\delta \end{bmatrix}, [c^4_{1,1}] := [\alpha\gamma]$$

で与えられる．こうして A はセルデータ $(\Lambda, \mathcal{T}, \mathcal{C}, \iota)$ を持つ Cellular 代数となる．

以下，A はセルデータ $(\Lambda, \mathcal{T}, \mathcal{C}, \iota)$ を持つ Cellular 代数とする．各 λ に対して，$\{c^\lambda_S \mid S \in \mathcal{T}(\lambda)\}$ を基底に持つような $\mathbf{k}$ 上の形式的な線型空間

$$\Delta(\lambda) := \bigoplus_{S \in \mathcal{T}(\lambda)} \mathbf{k} c^\lambda_S$$

を考え，(2.1) の式によって誘導される左 A 作用を導入する．すなわち，

$$ac^\lambda_S := \sum_{U \in \mathcal{T}(\lambda)} r^{(a,S)}_U c^\lambda_U$$

によって左 A 加群とみなす．これを λ に付随する**セル加群**という．セル加群 $\Delta(\lambda)$ 上に双線型形式

$$\langle -, - \rangle \colon \Delta(\lambda) \times \Delta(\lambda) \longrightarrow \mathbf{k}; \quad (c^\lambda_S, c^\lambda_T) \longmapsto r_{S,T}$$

が定義される．ここに $r_{S,T}$ は (2.2) によって与えられるスカラーである．この双線型形式 $\langle -, - \rangle$ によって退化する部分を

$$\mathrm{rad}_{\langle -,- \rangle}(\Delta(\lambda)) := \{x \in \Delta(\lambda) \mid \langle x, y \rangle = 0 \quad \text{for any } y \in \Delta(\lambda)\}$$

で表せば，$\langle ax, y \rangle = \langle x, \iota(a)y \rangle$ なので $\Delta(\lambda)$ の部分加群となる．これをセル加群 $\Delta(\lambda)$ の**根基**という．そこで $S(\lambda)$ を $\Delta(\lambda)$ の $\mathrm{rad}_{\langle -,- \rangle}(\Delta(\lambda))$ による商加群とおく．また，$\Lambda^+ := \{\lambda \in \Lambda \mid S(\lambda) \neq 0\}$ とおく．

命題 2.5 ([GL, Proposition 3.2, Theorem 3.4], [C, Lemma 2.5]) A をセルデータ $(\Lambda, \mathcal{T}, \mathcal{C}, \iota)$ を持つ Cellular 代数とする．

(i) 任意の $\lambda \in \Lambda^+$ に対して，商加群 $S(\lambda)$ は絶対既約である．
(ii) 集合 $\{S(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda^+\}$ は既約 A 加群の同型類の完全代表系を与える．
(iii) 任意の $\lambda, \mu \in \Lambda^+$ と $i \geq 0$ に対して，$\mathbf{k}$ 上の線型空間としての同型

$$\mathrm{Ext}^i_A(S(\lambda), S(\mu)) \simeq \mathrm{Ext}^i_A(S(\mu), S(\lambda))$$

が存在する．

特に命題 2.5 の (3) によって，A をクイバーと関係式で記述したとき，任意の頂点 i,j に対して

$$\sharp\{i \text{ から } j \text{ へ向かう矢印 }\} = \sharp\{j \text{ から } i \text{ へ向かう矢印 }\} \tag{2.3}$$

が成り立つ．

例 2.6　例 2.3 において，具体的に $n=3$ の場合に $\mathbf{k}\mathfrak{S}_3$ の既約表現の同型類の完全代表系を構成しよう．記号等は例 2.3 のものをそのまま使う．まず，セル加群は以下で与えられる．

(i) $\Delta((3)) := \mathbf{k}c^{(3)}_{t^{(3)}}$ であり，作用は

$$s_1 \mapsto 1 \quad s_2 \mapsto 1$$

で与えられる．

(ii) $\Delta((2,1)) := \mathbf{k}c^{(2,1)}_{t^{(2,1)}} \oplus \mathbf{k}c^{(2,1)}_{s_2 t^{(2,1)}}$ であり，作用は

$$s_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad s_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる．

(iii) $\Delta((1,1,1)) := \mathbf{k}c^{(1,1,1)}_{t^{(1,1,1)}}$ であり，作用は

$$s_1 \mapsto -1, \quad s_2 \mapsto -1$$

で与えられる．

標数が 2，3 以外のときは，全てのセル加群に対して双線型形式 $\langle -,- \rangle$ は非退化であり，$\mathrm{rad}_{\langle -,- \rangle} = 0$ である．よって上で与えたセル加群は $\mathbf{k}\mathfrak{S}_3$ の既約表現の同型類の完全代表系になっていて，これはそれぞれ自明表現，2 次元既約表現，符号表現である．

他方，標数が 3 のときは，以下のようになる．セル加群 $\Delta((3))$ に対して

$$c^{(3)}_{t^{(3)},t^{(3)}} c^{(3)}_{t^{(3)},t^{(3)}} = (1+s_1+s_2+s_1s_2+s_2s_1+s_1s_2s_1)^2 = 0$$

だから，$\mathrm{rad}_{\langle -,- \rangle}(\Delta((3))) = \Delta((3))$ となる．

セル加群 $\Delta((2,1))$ に対して，その根基を求よう．

$$\begin{aligned}
&c^{(2,1)}_{t^{(2,1)},t^{(2,1)}} c^{(2,1)}_{t^{(2,1)},t^{(2,1)}} = (1+s_1)^2 = 2c^{(2,1)}_{t^{(2,1)},t^{(2,1)}}, \\
&c^{(2,1)}_{t^{(2,1)},t^{(2,1)}} c^{(2,1)}_{s_2t^{(2,1)},s_2t^{(2,1)}} = (1+s_1+s_2s_1+s_1s_2s_1) = -c^{(2,1)}_{t^{(2,1)},s_2t^{(2,1)}} + c^{(3)}_{t^{(3)},t^{(3)}}, \\
&c^{(2,1)}_{s_2t^{(2,1)},s_2t^{(2,1)}} c^{(2,1)}_{t^{(2,1)},t^{(2,1)}} = (1+s_1+s_1s_2+s_1s_2s_1) = -c^{(2,1)}_{t^{(2,1)},s_2t^{(2,1)}} + c^{(3)}_{t^{(3)},t^{(3)}}, \\
&c^{(2,1)}_{s_2t^{(2,1)},s_2t^{(2,1)}} c^{(2,1)}_{s_2t^{(2,1)},s_2t^{(2,1)}} = 2(1+s_1s_2s_1) = 2c^{(2,1)}_{s_2t^{(2,1)},s_2t^{(2,1)}}
\end{aligned}$$

であって，標数は 3 なので

$$\langle c^{(2,1)}_{t^{(2,1)}}, c^{(2,1)}_{t^{(2,1)}} \rangle = \langle c^{(2,1)}_{t^{(2,1)}}, c^{(2,1)}_{s_2t^{(2,1)}} \rangle = \langle c^{(2,1)}_{s_2t^{(2,1)}}, c^{(2,1)}_{t^{(2,1)}} \rangle = \langle c^{(2,1)}_{s_2t^{(2,1)}}, c^{(2,1)}_{s_2t^{(2,1)}} \rangle = 2$$

である．よって，$\mathrm{rad}_{\langle -,- \rangle}(\Delta((2,1))) = \mathbf{k}(c^{(2.1)}_{t^{(2,1)}} - c^{(2.1)}_{s_2 t^{(2,1)}})$ である．

セル加群 $\Delta((1,1,1))$ に対して

$$c^{(1,1,1)}_{t^{(1,1,1)},t^{(1,1,1)}} c^{(1,1,1)}_{t^{(1,1,1)},t^{(1,1,1)}} = 1^2 = 1$$

だから，$\mathrm{rad}_{\langle -,- \rangle}(\Delta((1,1,1))) = 0$ となる．

以上で $\Lambda^+ = \{(2,1),(1,1,1)\} \subset \Lambda$ であって，既約 $\mathbf{k}\mathfrak{S}_3$ 加群の同型類の完全代表系は 2 つあり，自明表現 $\Delta((2,1))/\mathrm{rad}_{\langle -,- \rangle}(\Delta((2,1)))$ と符号表現 $\Delta((1,1,1))$ である．

例 2.7　例 2.4 において，具体的に既約 A 加群の同型類の完全代表系が得られることを確かめてみる．記号等は例 2.4 のものをそのまま使う．クイバーの表現の一般論 (例えば [ASS] などを参照) により，既約 A 加群の同型類の完全代表系は 3 つあり，それぞれ，

$$L(1) := \ \mathbf{k} \rightleftarrows 0 \rightleftarrows 0\ ,\ L(2) := \ 0 \rightleftarrows \mathbf{k} \rightleftarrows 0\ ,\ L(3) := \ 0 \rightleftarrows 0 \rightleftarrows \mathbf{k}$$

によって与えられる．

他方，各 $i \in \Lambda$ に対してセル加群は以下の形で与えられる:

(i) $\Delta(1) := \mathbf{k}c^1_1$ であり，作用は

$$e_i \mapsto \delta_{i,3},\ \alpha \mapsto 0,\ \beta \mapsto 0,\ \gamma \mapsto 0, \delta \mapsto 0$$

で与えられる．また，$\mathrm{rad}_{\langle -,- \rangle}(\Delta(1)) = 0$ である．

(ii) $\Delta(2) := \mathbf{k}c^2_1 \oplus \mathbf{k}c^2_2$ であり，作用は

$$e_1 \mapsto 0,\ e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \alpha \mapsto 0,\ \beta \mapsto 0,\ \gamma \mapsto 0, \delta \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる．また，$\mathrm{rad}_{\langle -,- \rangle}(\Delta(2)) = \mathbf{k}c^2_2$ である．

(iii) $\Delta(3) := \mathbf{k}c^3_1 \oplus \mathbf{k}c^3_2$ であり，作用は

$$e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_3 \mapsto 0,\ \alpha \mapsto 0,\ \beta \mapsto 0,\ \gamma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \delta \mapsto 0$$

で与えられる．また，$\mathrm{rad}_{\langle -,- \rangle}(\Delta(3)) = \mathbf{k}c^3_2$ である．

(iv) $\Delta(4) := \mathbf{k}c^4_1$ であり，作用は

$$e_i \mapsto \delta_{i,1},\ \alpha \mapsto 0,\ \beta \mapsto 0,\ \gamma \mapsto 0, \delta \mapsto 0$$

で与えられる．また，$\mathrm{rad}_{\langle -,- \rangle}(\Delta(4)) = \mathbf{k}c^4_1$ である．

従って，$\Lambda^+ = \{1,2,3\} \subset \Lambda$ であり，A 加群の同型

$$S(1) \simeq L(3), \quad S(2) \simeq L(2), \quad S(3) \simeq L(1)$$

を得る．

Cellular 代数の Cartan 行列と分解行列に関する性質を思い出そう．$\lambda \in \Lambda^+$ とする．既約 A 加群 $S(\lambda)$ の射影被覆を $P(\lambda)$ とかき，左 A 加群 M の組成因子に現れる $S(\lambda)$ の個数を $[M : S(\lambda)]$ で表すことにする．そこで $\lambda \in \Lambda$ と $\mu \in \Lambda^+$ をとり，

$$d_{\lambda,\mu} := [\Delta(\lambda) : S(\mu)]$$

とおき，A の**分解行列**を行列 $D_A := (d_{\lambda,\mu})_{\lambda\in\Lambda,\ \mu\in\Lambda^+}$ で定義する．また，A の Cartan 行列を正方行列 $C_A := ([P(\lambda) : S(\mu)])_{\lambda,\mu\in\Lambda^+}$ で定義する．

命題 2.8 ([GL, Proposition 3.6, Theorem 3.7], [KX3, Proposition 1.2]) A をセルデータ $(\Lambda, \mathcal{T}, \mathcal{C}, \iota)$ を持つ Cellular 代数とする．

(1) $\lambda \in \Lambda$ と $\mu \in \Lambda^+$ に対して，$d_{\lambda,\mu} = 0$ ならば，$\lambda \geq \mu$ が成り立つ．更に，$\lambda \in \Lambda^+$ に対して，$d_{\lambda,\lambda} = 1$ である．
(2) $C_A = {}^tD_AD_A$ が成り立つ．
(3) $\det(C_A) > 0$ である．
(4) $(\Lambda, \geq)$ の順序の線型拡大を $\overline{\Lambda} = \{\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_l\}$ とする．$\lambda \in \Lambda^+$ と i に対して A 加群の同型

$$(A^{\geq\mu_i} \otimes P(\lambda))/(A^{\geq\mu_{i+1}} \otimes P(\lambda)) \simeq \Delta(\mu_i)^{\oplus d_{\mu_i,\lambda}}$$

が成り立つ．ここに，$A^{\geq\mu} := \mathrm{Span}_{\mathbf{k}}\{c^{\mu'}_{S',T'} \mid S', T' \in \mathcal{T}(\mu'), \mu' \geq \mu\}$ である．

例 2.9　例 2.4 において，A の分解行列と Cartan 行列は次で与えられる．

$$D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

命題 2.10 ([KX2, Theorem 8.1], [KX4, Theorem 1.1]) A をセルデータ $(\Lambda, \mathcal{T}\mathcal{C}, \iota)$ をもつ Cellular 代数とする．

(1) $\mathbf{k}$ 上の代数 B が A の基本環であるとき，B は再び Cellular 代数である．
(2) A が自己移入代数のとき，A は弱対称代数である．

3 主結果

Cellular 代数の性質から，次のような代数を考えれば十分であることがわかる．まず，A の Gabriel クイバーの任意の頂点 i, j に対して等式 (2.3) が成り立っていなければならず，更に命題 2.10 により A は弱対称代数と仮定してもよい．また，A のカルタン行列と分解行

列の間には命題 2.8 の関係がある．そこで [S] で与えられている弱対称代数の分類から，上の性質を満たすもののみを考えれば十分であり，主結果は次の通りである．

定理 3.1　体 $\mathbf{k}$ を標数が 2 でないような代数閉体とし，A を体 $\mathbf{k}$ 上の連結な自己移入 Cellular 代数とする．代数 A が多項式増大表現型であれば，A は以下に挙げる代数のうちいずれかと同型である．更に，代数 (1) は有限表現型，代数 (2) から (6) は domestic な無限表現型，代数 (7) は domestic でない多項式増大表現型である．逆に，以下に挙げた代数は互いに非同型な多項式増大表現型の自己移入 Cellular 代数である．

(1) 例外型頂点が高々 1 つの直線からなる Brauer グラフに付随する Brauer グラフ代数.

(2) Kronecker 代数 $\mathbf{k}[X,Y]/(X^2,Y^2)$.

(3) 以下のクイバー Q と $\mathbf{k}Q$ の許容イデアル I からなる有界クイバー代数.

$$Q=\left(\begin{tikzcd} \circ \arrow[r, shift left, "\alpha"] & \circ \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[loop right, "\gamma"] \end{tikzcd}\right)\qquad I:=\langle\alpha\beta,\ \gamma^2,\ \alpha\gamma\beta\alpha,\ \beta\alpha\gamma\beta,\ \gamma\beta\alpha-\beta\alpha\gamma\rangle$$

$$Q=\left(\begin{tikzcd} \circ \arrow[r, shift left, "\alpha"] & \circ \arrow[l, shift left, "\delta"] \arrow[r, shift left, "\beta"] \arrow[loop above, "\epsilon"] & \circ \arrow[l, shift left, "\gamma"] \end{tikzcd}\right)\qquad I:=\langle\alpha\beta,\ \gamma\delta,\alpha\epsilon,\epsilon\beta,\gamma\epsilon,\epsilon\delta,\epsilon^2-\delta\alpha,\epsilon^2-\beta\gamma\rangle$$

(4) 以下のクイバー Q と $\mathbf{k}Q$ の許容イデアル I からなる有界クイバー代数.

$$Q=\left(\begin{tikzcd} \circ \arrow[r, shift left, "\alpha"] & \circ \arrow[l, shift left, "\delta"] \arrow[r, shift left, "\beta"] & \circ \arrow[l, shift left, "\gamma"] \end{tikzcd}\right)$$

(a) $I=\langle\alpha\beta\gamma\delta\alpha,\beta\gamma\delta\alpha\beta,\gamma\delta\alpha\beta\gamma,\delta\alpha\beta\gamma\delta,\gamma\beta,\alpha\delta\alpha-\alpha\beta\gamma,\delta\alpha\delta-\beta\gamma\delta\rangle$

(b) $I=\langle\alpha(\delta\alpha)^2,\gamma(\delta\alpha)^2,(\delta\alpha)^2\delta,(\delta\alpha)^2\beta,\alpha\delta\alpha\beta,\gamma\beta\gamma\delta,\delta\alpha-\beta\gamma\rangle$

(5) 重み 2 の例外型頂点が 2 つの直線からなる Brauer グラフに付随する Brauer グラフ代数.

(6) 以下のクイバー Q と $\mathbf{k}Q$ の許容イデアル I からなる有界クイバー代数，ただし $\lambda\in\mathbf{k}\setminus\{0,1\}$ とする．

$$Q=\left(\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \arrow[r, shift left, "\sigma"] & 3 \arrow[l, shift left, "\beta"] \end{tikzcd}\right)\qquad I=\langle\alpha\gamma\alpha-\alpha\sigma\beta,\beta\gamma\alpha-\lambda\beta\sigma\beta,\gamma\alpha\gamma-\sigma\beta\gamma,\gamma\alpha\sigma-\lambda\sigma\beta\sigma\rangle$$

$$Q=\left(\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift left, "\sigma"] & 2 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}\right)\qquad I=\langle\alpha^2-\sigma\gamma,\lambda\beta^2-\gamma\sigma,\gamma\alpha-\beta\gamma,\sigma\beta-\alpha\sigma\rangle$$

(7) 以下のクイバー Q と $\mathbf{k}Q$ の許容イデアル I からなる有界クイバー代数.

$$Q = \left(\begin{tikzcd} & 3 \arrow[d, shift left, "\gamma"] & \\ & 2 \arrow[u, shift left, "\delta"] \arrow[dl, shift left, "\beta"] \arrow[dr, shift left, "\epsilon"] & \\ 1 \arrow[ur, shift left, "\alpha"] & & 4 \arrow[ul, shift left, "\zeta"] \end{tikzcd} \right) \qquad I = \langle \beta\alpha + \delta\gamma + \epsilon\zeta, \alpha\beta, \gamma\epsilon, \zeta\delta \rangle$$

$$Q = \left(1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\gamma}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} 3 \underset{\zeta}{\overset{\epsilon}{\rightleftarrows}} 4 \right) \qquad I = \langle \beta\alpha - \delta\gamma, \gamma\delta - \epsilon\zeta, \alpha\delta\epsilon, \zeta\gamma\beta \rangle$$

$$Q = \left(1 \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\gamma}{\overset{\eta}{\rightleftarrows}} 3 \underset{\delta}{\overset{\zeta}{\rightleftarrows}} 4 \right) \qquad I = \left\langle \gamma\alpha\beta - \gamma\eta\gamma, \alpha\beta\eta\eta\gamma\eta, \beta\alpha, \delta\gamma, \eta\zeta, (\gamma\eta)^2 - \zeta\delta \right\rangle$$

参考文献

[AKMW] S. Ariki, R. Kase, K. Miyamoto and K. Wada, Self-injective cellular algebras of polynomial growth representation type, arXiv: 1705.08048 (2017).

[ASS] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński, Elements of the Representation Theory of Associative Algebras Volume 1, London Mathematical Society Student Texts **65**, 2006.

[ARS] M. Auslander, I. Reiten and S. Smalø, Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge studies in advanced mathematics **36**, Cambridge University Press, 1995.

[BiS] J. Bia lkowski, A. Skowroński, On tame weakly symmetric algebras having only periodic modules, Arch. Math. **81** (2003), 142–154.

[BHS] R. Bocian, T. Holm and A. Skowroński, Derived equivalence classification of weakly symmetric algebras of Euclidean type, J. Pure Appl. Algebra **191** (2004), 43–74.

[BS] R. Bocian and A. Skowroński, Weakly symmetric algebras of Euclidean type, J. Reine Angew. Math. **580** (2005), 157–199.

[C] Y. Cao, On the quasi-heredity and the semi-simplicity of cellular algebras, J. Algebra **267** (2003), 323–341.

[Erd] K. Erdmann, Blocks of tame representation type and related algebras, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 1990.

[DJ1] R. Dipper and G. James, Representations of Hecke algebras of general linear groups, Proc. London Math. Soc. **52** (1986), 20–52.

[DJ2] R. Dipper and G. James, The q-Schur algebra, Proc. London. Math. Soc. **59** (1989), 23–50.

[D] Yu. A. Drozd, Tame and wild matrix problems, In: Representations and Quadratic Forms, Academy of Science, Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev (1979), 39–74, (in Russian).

[G1] M. Geck, Hecke algebras of finite type are cellular, Invent. Math. **169** (2007), 50–517.

[G2] M. Geck, Leading coefficients and cellular bases of Hecke algebras, Proc. Edinb. Math. Soc. **52** (2009), 653–677.

[GL] J. J. Graham and G. I. Lehrer, Cellular algebras, Invent. Math. **123**, 1996, 1–34.

[KX1] S. König and C. C. Xi, On the structure of cellular algebras, Algebras and modules II (Geiranger 1996), 365–386, CMS Conf. Proc. **24**, Amer. Math. Soc., 1998.

[KX2] S. König and C. C. Xi, Cellular algebras: inflations and Morita equivalences, J. London Math. Soc. **60** (1999), 700–722.

[KX3] S. König and C. C. Xi, When is a cellular algebra quasi-hereditary?, Math. Ann. **315** (1999), 281–293.

[KX4] S. König and C. C. Xi, A self-injective cellular algebra is weakly symmetric, J. Algebra **228** (2000), 51–59.

[KX4] S. König and C. C. Xi, A self-injective cellular algebra is weakly symmetric, J. Algebra **228** (2000), 51–59.

[M] A. Mathas, Iwahori-Hecke Algebras and Schur Algebras of the Symmetric Group, Chapter 2, University Lecture Series **15**, Amer. Math. Soc., 1999.

[O] M. Ohmatsu, A classification of symmetric cellular algebras of finite representation type (in Japanese), Master' s thesis, Shinshu Univ., 2014.

[Ri] C. M. Ringel, Tame algebras and integral quadratic forms, Lecture Notes in Math., **1099**, Springer, Berlin, 1984.

[Ro] K. W. Roggenkamp, Biserial algebras and graphs, Algebras and modules II (1996), CMS Conf. Proc. **24**, Amer. Math. Soc. providence, RI (1998), 481–496.

[S] S. Schroll, Trivial extensions of gentle algebras and Brauer graph algebras, J. Algebra, **444** (2015), 183–200.

[SS1] D. Simson and A. Skowroński, Elements of the Representation Theory of Associative Algebras Volume 2, London Mathematical Society Student Texts

71, 2007.

[SS2] D. Simson and A. Skowroński, Elements of the Representation Theory of Associative Algebras Volume 3, London Mathematical Society Student Texts **72**, 2007.

[S] A. Skowroński, Selfinjective algebras of polynomial growth, Math. Ann.,**285** (1989),177–199.

[S2] A. Skowroński, Selfinjective algebras : finite and tame type, Trends in Representation Theory of Algebras and Related Topics, 169–238, Contemp. Math. 406, Amer. Math. Soc., 2006.

[W] J. Waschbüsch, On self-injective algebras of finite representation type, Monographs of Institute of Math. **14**, UNAM Mexico, 1983.

[X] C. C. Xi, Cellular algebras, Advanced School and Conference on Representation Theory and Related Topics SMR1735/10, International Centre for Theoretical Physics, 2006.